

Теорема 4. Высота треугольника с известными углами делится (считая от вершины) медианой в отношении, равном отношению суммы котангенсов углов треугольника, прилежащих к стороне, к которой проведена высота, к модулю котангенса угла треугольника, из которого проведена медиана.

Теорема 5. Медиана треугольника с известными углами делится (считая от вершины) его высотой в отношении, равном модулю отношения удвоенного котангенса угла треугольника, из которого выходит медиана, к котангенсу угла, из которого не выходит ни медиана, ни высота.

Теорема 6. Высота треугольника с известными углами делится (считая от вершины) биссектрисой внутреннего угла треугольника в отношении, равном произведению двух отношений: первое равно отношению синуса угла треугольника, из которого не выходит ни высота, ни биссектриса, к синусу угла треугольника, из которого выходит высота; второе равно модулю отношения суммы котангенсов углов треугольника, прилежащих к стороне, к которой проведена высота, к котангенсу угла треугольника, из которого выходит биссектриса.

Теорема 7. В треугольнике с известными углами биссектриса внутреннего угла треугольника делится (считая от вершины) высотой треугольника в отношении, равном произведению двух отношений; первое равно модулю отношения котангенса угла треугольника, из которого выходит биссектриса, к котангенсу угла треугольника, из которого не выходит ни биссектриса, ни высота; второе равно отношению суммы синусов углов треугольника, прилежащих к стороне, к которой проведена биссектриса, к синусу угла треугольника, из которого не выходит ни биссектриса, ни высота треугольника.

Теорема 8. В треугольнике с известными углами высота (первая) делится (считая от вершины) другой высотой в отношении, равном модулю произведения двух отношений; первое равно отношению котангенса угла треугольника, из которого выходит первая высота к котангенсу угла треугольника, из которого не выходит ни первая, ни вторая высота; второе равно отношению суммы котангенсов углов треугольника, прилежащих к стороне, к которой проведена первая высота, к котангенсу угла треугольника, из которого выходит вторая высота.

УДК 681.324

Головко В.А., Савицкий Ю.В., Маньяков Н.В., Рубанов В.С.

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ХАОТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Хаотическое поведение характеризуется высокой чувствительностью к начальным условиям и наблюдается во многих системах (котировки акций, ЭЭГ мозговой активности, центральная нервная система и др.). Обработка хаотических временных рядов может быть разделена на три этапа, показанных на рисунке 1. Первый этап – анализ временного ряда. В результате его идентифицируется хаотичность поведения и оцениваются параметры вложения. С использованием данных этого этапа возможно представить псевдофазовый портрет системы или построить нейронную сеть для оптимального предсказания ряда. Общим параметром хаотичности является вычисление наибольшего показателя Ляпунова, который должен быть положительным [1]. Такой показатель Ляпунова является статистической мерой расхождения двух траекторий, исходящих из близких точек. Пусть d_0 является начальным расстоянием между двумя точками, а d_n – расстояние между этими же точками через n шагов. Тогда наибольший

показатель Ляпунова определяется соотношением

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{d_n}{d_0}. \quad (1)$$

Имея дело с одномерными временными рядами необходимо прежде всего произвести псевдофазовую реконструкцию поведения системы. Она основана на теореме вложения Такенса [2], которая гарантирует всё знание о поведении системы во временном ряде только одного измерения. В результате получается полный многомерный фазовый портрет, построенный только из одного временного ряда.

Для применения теоремы вложения необходимо определить подходящие размерность пространства вложения и временную задержку. Оценивание этих параметров приводит к максимальной предсказуемости временных рядов и используется для выбора оптимального размера окна (количества входных элементов) в нейронной сети для предсказания ряда. В разделах 2 и 3 описывается подход к выбору временной задержки и размерности пространства вложения. Разделы 4 и



Рисунок 1 – Функциональная диаграмма обработки данных.

Головко Владимир Адамович. К.т.н., профессор кафедры ЭВМ и С Брестского государственного технического университета.

Савицкий Юрий Викторович. К.т.н., доцент кафедры ЭВМ и С Брестского государственного технического университета.

Маньяков Николай Владимирович. Ассистент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.

Рубанов Владимир Степанович. К.ф.-м.н., заведующий кафедрой высшей математики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

5 посвящены определению наибольшего показателя Ляпунова.

2. ВЫБОР ВРЕМЕННОЙ ЗАДЕРЖКИ

Для выбора оптимальной временной задержки τ могут быть использованы следующие подходы: автокорреляционная функция, взаимная информация и др. Оптимальная временная задержка обычно выбирается в соответствии с первым нулем автокорреляционной функции или первым минимумом функции взаимной информации.

Функция взаимной информации описывается следующим соотношением [3]:

$$I(\tau) = -\sum_{i,j} P_{ij}(\tau) \cdot \ln \frac{P_{ij}(\tau)}{P_i \cdot P_j}, \quad (2)$$

где P_i - вероятность найти точку временного ряда в i -ом интервале, а $P_{ij}(\tau)$ - совместная вероятность нахождения точки временного ряда в i -ом интервале и этой же точки в j -ом интервале спустя время τ .

Оценив τ таким образом, мы получаем координаты независимыми на сколько это возможно.

На рисунках 2 и 3 представлены графики взаимной информации для аттракторов Энона и Лоренца соответственно. Как видно из рисунка 2, первый минимум функции взаимной информации равен 0.16 для данных Лоренца. Для данных Энона не возможно определить минимум. В данном случае мы берем $\tau = 1$ непосредственно из уравнений Энона.

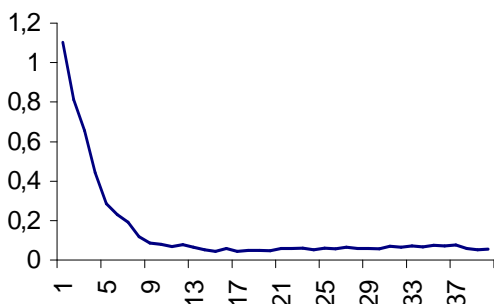


Рисунок 2 – График взаимной информации $I(\tau)$ от τ для аттрактора Энона.

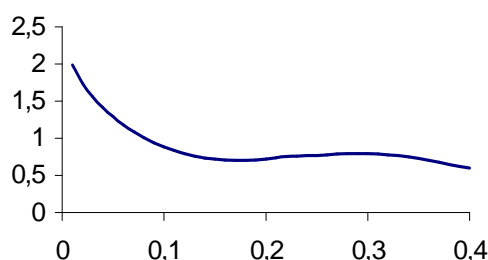


Рисунок 3 – График взаимной информации $I(\tau)$ от τ для аттрактора Лоренца.

3. РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА ВЛОЖЕНИЯ

Как отмечалось раньше, размерность пространства вложения используется для псевдофазовой реконструкции и определения размера окна для прогнозирующей нейронной сети.

Предположим, имеется временной ряд представленный N точками. Такенс доказал, что реконструкция динамики возможна при размерности пространства вложения

$$m \geq 2[d] + 1, \quad (3)$$

где d – фрактальная размерность настоящего аттрактора, $[d]$ – обозначает целую часть фрактальной размерности. Тогда $k = m - 1 = 2[d]$ характеризует размер окна. В этом случае восстановленный аттрактор в m -мерном псевдофазовом пространстве сохраняет важнейшие топологические свойства исходного аттрактора.

Существует множество методов для оценки размерности пространства вложения таких, как метод ложных ближайших соседей, фрактальная размерность, метод главных компонент и т.д. Рассмотрим, к примеру, метод ложных ближайших соседей [4]. Он основан на идее, что геометрические свойства исходного и восстановленного аттракторов должны совпадать.

Алгоритм метода ложных ближайших соседей следующий:

1. Пусть $m = 1$. Находим для каждой точки $\bar{x}(i)$ временного ряда ближайшего «соседа» $\bar{x}(j)$ в m -мерном пространстве.

2. Вычисляем разность $|\bar{x}(i) - \bar{x}(j)|$.

3. После этого проводим одну итерацию и определяем

$$R_i = \frac{|\bar{x}(i+1) - \bar{x}(j+1)|}{|\bar{x}(i) - \bar{x}(j)|}.$$

4. Если $R_i > R_t$, где R_t подходящий порог, то такая точка является ложным ближайшим соседом. Как результат подсчитывается количество таких ложных ближайших соседей P .

5. Вычисляется P/N и алгоритм повторяется для $m = m + 1$.

6. Алгоритм продолжается до тех пор, пока частное P/N не станет близким к нулю.

На рисунках 4 и 5 представлены графики для определения размерности пространства вложения для данных Энона и Лоренца соответственно. Из рисунков определяется размерность равная 3 для данных Энона и 5 для данных Лоренца.

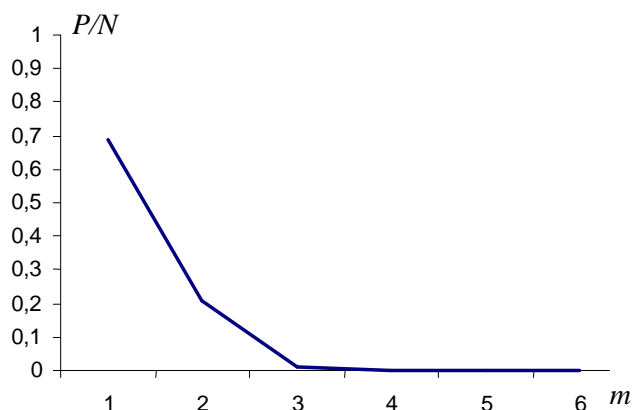


Рисунок 4 – Определение размерности пространства вложения для аттрактора Энона.

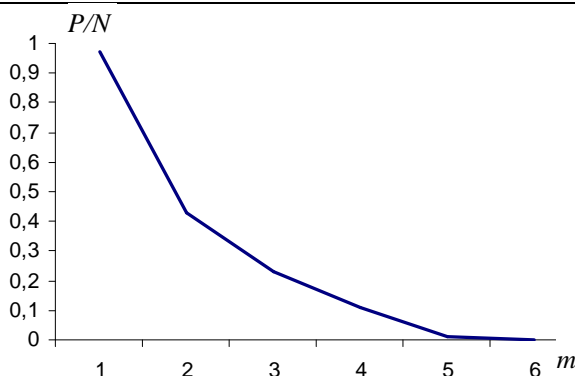


Рисунок 5 – Определение размерности пространства вложения для аттрактора Лоренца.

4. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАИБОЛЬШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА

Стандартный подход к вычислению λ заключается в следующем:

1. Берем две точки из области притяжения аттрактора отдаленных друг от друга на расстояние d_0 . Обычно d_0 выбирается меньшим чем 10^{-8} .
2. Определим значения точек через одну итерацию вперед и вычисляем новый разбег между траекториями используя метрику Евклида. Как результат оцениваем $\ln(d_1)$.
3. Повторяем последний шаг n раз, вычисляя $\ln(d_1), \ln(d_2) \dots \ln(d_n)$.
4. Рисуем график $\ln(d_n)$ от n .
5. Используя метод наименьших квадратов строим прямую регрессии, беря в расчет только точки, для которых $\ln(d) < 0$. Наклон регрессионной прямой оценивает наибольший показатель Ляпунова.

Оценка λ выше приведенным способом является сложной задачей, так как требуется временной ряд с очень большой выборкой для того, чтобы найти точки, отстоящие друг от друга на расстояние меньшее чем 10^{-8} . Это очень проблематично для реальных данных. Поэтому традиционный подход ограничен в применении ко многим реальным данным. Одним из путей преодоления этого является использование нейронных сетей для вычисления наибольшего показателя Ляпунова.

5. НЕЙРОСЕТЕВОЙ ПОДХОД

Ключевой идеей предлагаемого метода [5] является вычисление при помощи прогнозирующей нейронной сети расхождения двух близлежащих траекторий на n шагов вперед, используя итерационный подход. Эта процедура может быть представлена следующим алгоритмом:

1. Обучаем нейронную сеть на прогноз по методу скользящего окна.
2. Выбираем любую точку $x(t)$ из обучающей выборки и формируем следующий набор данных: $\{x(t), x(t-\tau) \dots x(t-(k-1)\tau)\}$, где k – размер окна.
3. Вычисляем $\{x(t+\tau), x(t+2\tau) \dots x(t+n\tau)\}$ используя многошаговый прогноз $x(t+i\tau) = F(x(t-(i-1)\tau), x(t-(i-2)\tau) \dots x(t-(i-k)\tau))$ где $i = \overline{1, n}$, F – функция определяющая выход прогнозирующей нейронной сети.

4. Вычисляем $x'(t) = x(t) + d_0$, где $d_0 \approx 10^{-8}$ и подавая на сеть $\{x'(t), x(t-\tau) \dots x(t-(k-1)\tau)\}$ повторяем шаг 3 для получения $x'(t+i\tau)$, $i = \overline{1, n}$.

5. Оцениваем $\ln d_i = \ln|x'(t+i\tau) - x(t+i\tau)|$, $i = \overline{1, n}$ и выбираем только точки, где $\ln d < 0$.

6. Строим график $\ln(d_n)$ от n .

7. Строим прямую регрессии для выбранных точек и вычисляем её наклон, который равен наибольшему показателю Ляпунова.

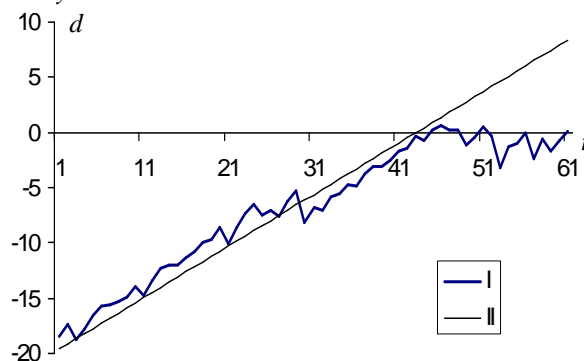


Рисунок 6 – I – изменение расстояния между двумя близкими траекториями для аттрактора Энона, II – прямая регрессии.

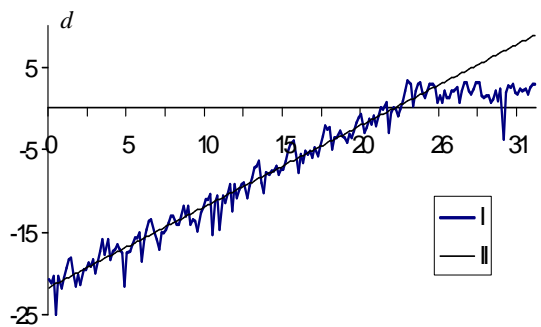


Рисунок 7 – I – изменение расстояния между двумя близкими траекториями для аттрактора Лоренца, II – прямая регрессии.

Данный метод для вычисления λ был опробован используя многослойной персептрон. Для эксперимента использовалась нейронная сеть с 7 входными элементами, 5 скрытыми и 1 выходным нейроном для предсказания временных рядов Лоренца и Энона. Элементы скрытого слоя имели сигмоидную функцию активации, а выходной элемент – линейную. Для обучения сети использовался алгоритм обратного распространения ошибки с адаптивным шагом. Обучающая выборка состояла из 1500 элементов, смоделированных через $\tau = 1$, для Энона и 930 элементов, взятых через $\tau = 0.16$, для данных Лоренца соответственно. Среднеквадратичная ошибка обучения сети для данных Энона составила $5.92 \cdot 10^{-5}$ после 1000 итераций. Рисунок 6 показывает график $\ln(d_n)$ от n и прямую регрессии, которая определяет показатель Ляпунова. Оцененное значения $\hat{\lambda} = 0.43$ близко к эталонному значению 0.419. Среднеквадратичная ошибка для ряда Лоренца составила $9.2 \cdot 10^{-4}$ после 700 итераций. Прямая регрессии и функция $\ln(d_n)$ от n представлены на

рисунке 7. Наибольший показатель Ляпунова равен 0.98 (ожидаемое значение 0.906). Можно заметить, что нейронная сеть осуществляет довольно точную оценку.

Как видно очевидное преимущество предложенного подхода в сравнении с традиционным – простота и точность.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье приведены стандартный и новый подход к анализу временных рядов. Они необходимы для идентификации хаотичности поведения временного ряда. Предложен новый подход к вычислению наибольшего показателя Ляпунова, основанный на использовании нейронной сети для уменьшения сложности вычислений.

УДК 681.324

Головкин В.А., Савицкий Ю.В.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ХАОТИЧЕСКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее перспективных направлений нейросетевых технологий является проектирование систем для решения класса задач, связанных с моделированием и прогнозированием временных процессов в различных областях знаний. Традиционные подходы к анализу временных рядов основаны на линейной математике. Однако линейность не является приемлемым средством для исследования процессов, характеризующихся хаотическим поведением. Переход от простых регрессионных и других традиционных статистических моделей прогноза к нелинейным высокоадаптивным экстраполирующим фильтрам, реализованным в виде сложных нейронных сетей, позволяет во многих случаях значительно улучшить качество прогнозных моделей.

Хаотическое поведение характеризуется высокой чувствительностью к начальным условиям и наблюдается во многих системах (котировки акций, ЭЭГ мозговой активности, центральная нервная система и др.). Ключевой проблемой анализа хаотических систем является их непредсказуемость на большой промежуток времени. Это связано с экспоненциальным ростом ошибок прогноза на каждом шаге прогнозирования. Поэтому улучшение точности прогноза имеет важное значение при решении широкого круга практических задач. Это позволяет также понять поведение наблюдаемых нелинейных процессов и воспроизвести фазовую траекторию. Такая возможность основана на теореме вложения [1], которая гарантирует, что знание о поведении системы содержится во временном ряде только одного измерения. Как результат полное многомерное фазовое пространство может быть построено только из одного временного ряда.

Для применения теоремы вложения необходимо определить приемлемые временную задержку τ и размерность пространства вложения m . Существует много методов для определения оптимальной временной задержки (автокорреляционная функция, взаимная информация и др.) и размерности пространства вложения (метод ложных ближайших соседей, фрактальная размерность, метод главных компонент) [2,3]. Оценка этих параметров приводит к максимальной предсказуемости хаотического временного ряда и может быть использована для выбора оптимального размера окна (количество входных нейронов) в прогнозирующей нейронной сети.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. H. Kantz. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of time series // Phys. Lett. A 185, 77 (1994).
2. F. Takens. Detecting Strange attractor in fluid turbulence. – Berlin: Springer-Verlag, 1981.
3. Fraser, H. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information // Phys. Rev. A 33, 1134 (1986).
4. M. Kennel, R. Brown, H. Abarbanel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction // Phys. Rev. A 45, 3403 (1992).
5. Vladimir Golovko, Yury Savitsky, Nikolay Maniakov. Modeling Nonlinear Dynamic using Multilayer Neural Network // Proceedings of the Workshop Intelligent Data Acquisition and Advance Computing System: Technology and Application (IDAACS'2001), Foros, Ukraine, July 1-4 2001, pp. 197-202.

2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И ПСЕВДОФАЗОВАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ

Цель предсказания временного ряда может быть описана следующим образом: для данной последовательности $x(1), x(2) \dots x(l)$ необходимо найти продолжение $x(l+1), x(l+2) \dots$. Нелинейная модель для предсказания может быть представлена как $x(t) = F(x(t-1), x(t-2), \dots, x(t-k))$, где $t = k+1, N$, F – нелинейная функция, построенная с помощью искусственной нейронной сети, и k – размер скользящего окна, который равен числу входных нейронов сети. В качестве базовой архитектуры для прогнозирования временных процессов в работе использован многослойный перцептрон (Multilayer Perceptron, MLP). Доказано, что данная нейронная сеть способна аппроксимировать любую непрерывную функцию со сколь угодно высокой точностью. Другим важным свойством MLP является способность к обобщению информации, представленной в множестве обучения. Следовательно, MLP является мощным инструментом для построения прогнозирующих систем.

Рассмотрим более детально применение многослойного перцептрона для прогнозирования хаотических временных рядов. В качестве исследуемых хаотических систем будем использовать аттракторы Лоренца и Энона.

Аттрактор Лоренца описывается системой трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

Процесс Лоренца является хаотической системой для значений параметров $G=10$, $r=28$ и $b=8/3$. Последовательность значений координаты x , полученная путем численного решения системы (1) с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом 0.01, изображена на рисунке 1. Рисунок 2 иллюстрирует трёхмерный аттрактор Лоренца.